



TITLE:

渦、乱流の研究と層流翼型の開発 (オイラー方程式の数理解析: カルマン 渦列と非定常渦運動100年)

AUTHOR(S):

橋本, 毅彦

CITATION:

橋本, 毅彦. 渦、乱流の研究と層流翼型の開発 (オイラー方程式の数理解析: カルマン渦列と非定常渦運動100年). 数理解析研究所講究録 2012, 1776: 1-11

ISSUE DATE:

2012-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171767>

RIGHT:

渦、乱流の研究と層流翼型の開発

橋本毅彦（東京大学）

1. 序

テオドル・フォン・カルマンは、ゲッチンゲン大学在学中の 1911 年にいわゆる「カルマン渦」と呼ばれる流体の流れの後に生じる渦配列の規則性を発見した。その発見の経緯は、彼の自伝『大空への挑戦 (The Wind and Beyond)』の第 7 章に生き生きと記されている。¹彼は同じ研究室のカール・ヒーメンツの水流中の円筒に働く圧力の測定実験がなかなか安定させられず困っているところを目撃して、後方に渦が交互にできることを理論的計算から突き止めていったのである。

カルマンとヒーメンツが所属していた研究室は、ルドヴィヒ・プラントルが流体力学の研究を進めていた研究室であり、飛行機の誕生とともにツェッペリンなどの実用飛行船の登場により制度的社会的支援を受けながら空気力学の研究を精力的に進めていた。カルマンが渦列の規則性を発見したのと同じ頃、プラントルは自分らの風洞実験のデータとパリのグスタヴ・エッフェルによる実験結果との不整合に悩まされていた。風洞内で球に働く抵抗力の大きさについて両者の結果が合わないのである。プラントルはパリに赴いてエッフェルと協議し、風洞測定にあたってレイノルズ数の影響を考慮せねばならぬこと、彼が既に提案していた境界層に関して乱流の発生を考慮しなければならないことを知るようになる。²

¹ Theodore von Kármán, *The Wind and Beyond: Theodore von Kármán, Pioneer in Aviation and Pathfinder in Space* (Boston: Little Brown, 1967), Chapter 7: "Beginning of Aviation Science." 邦訳：カルマン(野村安正訳)『大空への挑戦：航空学の父カルマン自伝』（森北出版、1995年）、第7章「航空学の始まり」。本書の邦訳は、出版社と訳者の好意により出版社ホームページで、邦訳未掲載の最後の6章も含めて閲覧可能である。2011年9月の時点で掲載サイトのアドレスは、
<<http://www.morikita.co.jp/cgi-bin/9451/oozora.cgi>>。この情報は福岡工業大学溝田武人教授にお教え頂いた。

² プラントルとエッフェルとの風洞データの比較検討の経緯については、Michael Eckert, *The Dawn of Fluid Dynamics: A Discipline between Science and Technology* (Weinheim: Wiley-VCH, 2006), pp. 49-52、を参照。プラントル以降の空気力学の歴史については同書が詳しい。航空工学との関連により配慮した空気力学の歴史として、ジョン・アンダーソン Jr. (織田剛訳)『空気力学の歴史』（京都大学学術出版会、2009年）がある。

プラントルは第一次世界大戦前、大戦中には後方渦の概念に基づく誘導抗力の概念を提唱し、特定形状の翼に働く誘導抗力、風洞壁効果の算定法を研究室の助手や学生とともに作りあげていく。第一次世界大戦後は、再び境界層の性質に関する研究を理論実験両面から進めていった。

本稿は、このプラントルが進めた境界層研究がその後発展し、1930年代後半にいわゆる層流翼と呼ばれる翼型の開発につながっていくことを見ていく。³そのために次節で1920年代末の航空工学者の関心として流線型の機体が求められていたこと、そして境界層の問題に注意が向き始めていたことを見ておくことにする。

2. ジョーンズの流線型の図

イギリスの航空工学者 B・メルヴィル・ジョーンズは 1929 年に王立航空協会で「流線型飛行機」と題する講演をした。⁴講演中に登場するグラフは航空工学史において有名なもので、そこには飛行機が表面摩擦力と誘導抗力だけしかもたず他の渦の発生による抗力がないと仮定したときのエンジン出力と最高速度との関係が図示され、現存飛行機がさらに性能向上できる余地をもっていることが一目瞭然に表現されている。その表面摩擦の算定にあたって、彼は機体の主翼や胴体などの各部品を進行方向の長さを等しく持った平面を想定し、そのような「等価平面」の表面摩擦を足し合わせることで飛行機全体の表面摩擦を見積もった。平面の表面摩擦については、風洞実験結果に基づく速度や面積と表面摩擦との関係式を利用した。

ジョーンズは講演の2年前に同様の報告を政府委員会に提出し、同様に流線型の重要性を強調しているが、その内容と 1929 年講演の内容とはいくつかの点で異なっている。⁵その一つがこの平面の表面摩擦力の見積もりについてである。1927 年の委員会報告では平面の表面摩擦について一つの関係式しか考慮されていないのに対し、1929 年の協会講演では二つの関係式が考慮され、二つの曲線が描かれているのである。その理由は、1927 年の時点でジョーンズは境界層の

³ 本稿の内容を広げ、飛行機の発明から終戦までの航空工学と空気力学の歴史を追った著作（『飛行機と科学者（仮題）』）の出版を予定している。

⁴ B. Melville Jones, "The Streamline Aeroplane," *Journal of the Royal Aeronautical Society*, 33(1929): 358-85.

⁵ B.M. Jones, "The Importance of 'Streamlining' in Relation to Performance" T. 2519 (September 1927), DSIR 23/2533, NA.

層流状態と乱流状態を区別していなかったのに対し、1929年の時点ではそれらを区別していることによる。層流境界層から乱流境界層への遷移の問題は、プラントルらがすでに研究を進めていたが、この頃からイギリスを含む各国の航空工学者の間でも注目されていったことを、両報告の内容の差は示している。

1927年に提出されたジョーンズの報告を受けて、イギリス政府の航空研究委員会では流線型の飛行機を設計するための基礎的な研究を進めていくことになるが、そのために彼が着任した専門パネルは「干渉パネル」と呼ばれ、その主眼は境界層の問題よりも機体周りの気流が渦や乱れを作らないようにすることに向けられた。「カウリング」のイギリス版ともいえる「タウネンド・リング」などの開発はその成果だった。干渉パネルの活動は5年ほど続けられ、飛行機の形状を流線型にするための研究が進められた。

1930年代になると航空工学と空気力学の研究者の目は境界層の振る舞いとその制御に向かっていくことになる。後述する日本の航空工学者谷一郎は、「1935年頃の飛行機は、脚や支柱などが露出されない“流線形”になっており、高速状態での抵抗の大部分は、表面の摩擦抵抗によるものでありました」と語っている。⁶

そのような問題関心の推移は、1930年にイギリス政府の航空研究委員会の空気力学小委員会の下に、「流体力学パネル」という専門委員会が設置されたことから伺うことができる。⁷同パネルは、境界層と乱流に関する理論と実験を検討課題とするもので、活動の一環として当時盛んに進められている乱流と境界層に関する研究動向を盛り込んだ概説論文集の編集が企画された。その論文集はその後シドニー・ゴールドスタインによって編集され、『流体力学の現代的発展』として出版された。⁸

3. プラントルの境界層と乱流の研究

プラントルは第一次大戦中の1916年にすでに、「乱流理論の研究計画」と題する簡単なメモを残している。⁹そこで乱流に関する二つの状態、すなわち乱

⁶ 谷一郎「研究の回顧」、『東京大学宇宙航空研究所報告』4巻2号、1968年、168ページ。

⁷ Minutes of Fluid Motion Panel, 20 June 1930, DSIR 22/49, National Archives, Kew, England.

⁸ Sydney Goldstein ed., *Modern Developments in Fluid Dynamics* (Oxford: Oxford University Press, 1938).

⁹ Eckert, *Dawn of Fluid Dynamics*, op.cit., pp. 112-113、に草稿の写真とともに引用され

流が発生するプロセスと、乱流が継続している状態の両者が分析の対象になるとした。そのうちの後者、乱流がすでに発生し、その発達した乱流に対する理論的検討を進めることで、プラントルは「混合距離」なる概念を提唱するようになる。

1924年10月にテオドル・フォン・カルマンに宛てた書簡で、プラントルは次のように自分が考えることを伝えた。「私は最近乱流の平均運動に対して、もっともらしい前提から導出され、多くの事例に適用可能な微分方程式を見つけ出すという作業に没頭しています。」¹⁰そしてその鍵は「境界条件に適合するような長さ」になるだろうと付言した。翌年出版された論文「成長した乱流の研究」において、プラントルはノズルから勢いよく噴出する蒸気などのジェット流を取り上げて、この長さの概念について説明した。¹¹ジェット噴流はノズル口から噴出された後、徐々に幅が広がり拡散していく。その拡散は、ジェット噴流と周囲の大気との乱流の作用による混合によるものである。そのような混合により、ジェット流は周囲の空気に運動量を提供し、自らは運動量を喪失していく。プラントルはこのジェットが周囲の空気に運動量を提供して自らの運動量を喪失するのに要する距離を乱流の性質を表す量として導入した。それは走行する車輛がブレーキをかけて停止するまでに要する「制動距離(Bremsweg)」のようなものだと述べた。¹²

翌1926年にチューリッヒで開催された第二回国際力学会議において、プラントルはこのように導入された距離を「混合距離」として提案した。¹³その講演で、「完全に発展した乱流という大きな問題」の存在を指摘し、そのような「渦が摩擦による減衰にも関わらず新しい渦をうみだし続ける過程の内的な理解と量的な計算、ならびに渦の減衰と生成との競合から帰結する混合の力の決定と

ている。

¹⁰ Prandtl to Kármán, 10 October 1924. Eckert, *Dawn of Fluid Dynamics*, op.cit., p. 117, に引用。

¹¹ Ludwig Prandtl, "Berichte über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz," *Zeitschrift für Angewandte Mechanik und Mathematik*, 5 (1925): 136-139, reprinted in *Prandtl Gesammelte Abhandlungen*, vol. 2, 714-718. Michael Eckert, *The Dawn of Fluid Dynamics*, p. 117 に引用。

¹² *Prandtl Gesammelte Abhandlungen*, vol. 2, p. 716.

¹³ Ludwig Prandtl, "Über die ausgebildete Turbulenz," *Verhandlungen des II. Internationalen Kongress für Technische Mechanik, 1926* (Zürich: Füßli, 1927): 62-75; reprinted in *Prandtl Gesammelte Abhandlungen*, vol. 2, pp. 736-751.

いう問題は、なかなか解くことができないだろう」と述べている。¹⁴

講演の中で、彼はレイノルズ応力との関連でこの混合距離の概念を説明している。流れが乱流を引き起こすと、まるで摩擦力を被るようにして流れは運動量を消費する。この見かけの摩擦力は、接触し合う二つの流れの間で運動量が提供・交換されることによって生じると考えられる。それを数量的に表す指標として「混合距離」を提案するのである。それは、運動量の交換、レイノルズ応力に対応するものでもあった。

その後、ゲッチンゲンの若い研究者が、プラントルの「混合距離」の概念に基づきながらいくつかの異なる実験設定について計測を行い、それを応用していった。風洞内のように曲がった壁面によって生じる乱流、障害物の背後に生じる乱流などである。またとりわけ、プラントルの学生であり、1920年代後半以降はゲッチンゲンのプラントルとの競争意識を燃やして境界層と乱流の研究に取り組んだカルマンは、プラントルの混合距離の概念と理論をさらに発展させるような境界層の数学的な基礎理論を提出した。それは相似法則を用いてプラントルの混合距離の理論をより一般化するものだった。対数グラフ用紙を駆使しつつ、助手とともに見出したその理論を、カルマンはドライデンから彼の右腕となる助手をアーヘンまで派遣してもらい、彼らの補正式熱線流速計を利用して厳密にチェックした。その新しい理論を構想し発見を達成するまでの経緯は、カルマンの自伝『大空への挑戦』の「乱流」と題された章に生き生きと語られている。¹⁵彼らの理論は、1930年にストックホルムで開催された国際応用力学会議で披露されることになる。プラントル、カルマン、ドライデン、そして彼らの学生や助手たちによる切磋琢磨によって、境界層と乱流の理論は1930年頃には高度に数学的な理論と精密な実験成果を備えた研究分野として現れていたのである。イギリスの航空研究委員会に流体力学パネルが設置された背景には、そのような流体力学研究の世界的な進展があった。

4. テイラーの渦と乱流の研究

1920年代から30年代初頭にかけて乱流の問題に取り組んでいたテイラーは、プラントルと問題意識を共有するようになっていった。彼の乱流研究の

¹⁴ Ibid., p. 736.

¹⁵ 前掲カルマン『大空への挑戦』、第17章「乱流」。

代表作となる1934年から35年にかけて提出された一連の5本の論文は、1910年代からの渦と乱流に関する自身の研究成果を利用しつつ、それまでの理論的アイデアを発展させ結実させたものである。5本の論文は最初航空研究委員会に技術報告として提出され、後に加筆修正されて王立協会紀要に出版された。また前述のとおり、ゴールドスタインが編集した『流体力学における現代的発展』の「乱流」の章の中核を占めることになった。

テイラーは1931年に熱伝達に関する論文を航空研究委員会に提出し、その報告は翌年王立協会紀要に出版された。¹⁶その中で、テイラーはプラントルの「混合距離」の理論と自分の理論との比較を試み、自らの理論の優秀性を実験的に証明しようとしている。その論文「流体による渦と熱の伝達」において、ゲッチング・グループのシュリヒティングの風洞内の円筒背後の風速の測定結果を利用する。プラントルの理論では物体背後の速度分布は温度分布と一致することになるはずであるが、テイラーの理論では速度分布と温度分布とは異なることになる。そのことを実験的に検証することを、彼は国立物理研究所のフェージらに依頼した。その結果は、プラントルの理論ではなくテイラーの理論によく合致するものだった。実験的な検証結果に続いて、彼は「運動が2次元に限定される際に『運動量輸送』理論が誤っていることの証明」という節を立て、理論的にプラントルの理論が不完全であることを立証した。

その後1934年7月にケンブリッジで国際応用力学会議が開催されると、プラントルも再度イギリスを訪れその地で講演した。¹⁷プラントルのケンブリッジ滞在中、テイラーは彼を自宅に招き歓談した。それ以降、テイラーとプラントルはしばしば書簡によって研究上のことで連絡を取り合い、交流を深めていくことになる。テイラーはプラントルの研究を引用し、プラントルもテイラーの研究を引用した。1935年のプラントル生誕60年を記念した論文集が企画されると、テイラーは「絞り流における乱流 (Turbulence in Contracting Stream)」と題する論文を寄稿し、そこでプラントルの理論を前提に当該現象を理論的に検討した。¹⁸数学的に論述された論文であるが、ハネコムを使った低乱

¹⁶ G.I. Taylor, "The Transport of Vorticity and Heat through Fluids in Turbulent Motion," *Proceedings of the Royal Society*, A 135 (1932): 685-705.

¹⁷ 講演集は、*Proceedings of the fourth International Congress for Applied Mechanics* (Cambridge: Cambridge University Press, 1935)として出版された。

¹⁸ G.I. Taylor, "Turbulence in a Contracting Stream," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 15 (1935): 91-96.

流風洞を実現するための技術の理論的基礎を提供するものだった。またこの年に交わされた書簡には、テイラーがプラントルに敬意を払い、彼をノーベル賞候補として推薦の意向をもっていることも伝えている。¹⁹プラントル自身はその申し出に謝辞を述べ、授賞には懐疑的な考えをもっていることを伝えている。²⁰

1934年12月に開催された流体力学パネル会合において、テイラーは前述の乱流の統計理論に関する報告を提出した。その論文は、1921年の相関連数の概念を一般化し、プラントルの「混合距離」の概念を批判的に修正することによって乱流を統計的に取り扱う基礎理論を提供するものだった。そこでテイラーは、プラントル理論が個別の塊の時間的振る舞いを扱おうとするのに対し、同時刻の空間全体の流れの場を扱おうとした。その意味で、プラントルの理論はラグランジュ的であるのに対し、自分の理論はオイラー的だと特徴づける。そのような理論的考察によって、彼はプラントルの「混合距離」に匹敵する「長さ」の概念を提唱する。それは渦の大きさに相当する概念であった。

12月の会議では、テイラーが自身の著した論文について紹介し、渦(eddy)のサイズの統計データが得られるような測定実験を考案したことを述べ、そのような実験がすでに国立物理研究所で着手されていることを同席する同研究所を代表する他の委員が補足説明した。

彼らの説明が終わるとすぐに、ジョーンズがテイラー論文は重要な工学的意味を有することを示唆している、と発言した。テイラー論文は風洞内と大気中において渦のサイズに違いがあることを結論する。その結論から重要な技術的意味を導き出すことができることを工学者ジョーンズは指摘したのである。議事録にはその様子が次のように記録されている。

ジョーンズ教授はテイラー教授の大気中の渦の最小サイズは25センチ程であるという見積もりに注意を向けた。これは境界層の流れの種類に影響を及ぼすには大きすぎないかと、彼はテイラー教授に尋ねた。テイラー教授は確実な情報は持ち合わせていないが、25センチというのは境界層に影響するにはやや大きすぎるだろうと述べた。ジョーンズ教授はこのことは非常に

¹⁹ G.I. Taylor to Ludwig Prandtl, 15 November 1935, Taylor Collection, D65⁶⁰, Trinity College Library, Cambridge University.

²⁰ Ludwig Prandtl to G.I. Taylor, 30 November 1935, Taylor Collection, D65⁶¹, Trinity College Library, Cambridge University. プラントルはそこで、当時のノーベル物理学賞は原子物理学の研究に限られ、自分の研究は数学と工学の折衷のように思われていると伝えた。

重要な実用的ポイントだと述べ、米国での飛行機が球を曳航する実験により、大気が比較的に乱流がないことを示唆していることに注意した。これはおそらく渦は存在するが、境界層に影響を及ぼすには大きすぎるためかも知れない。ジョーンズ教授は自由な気球から下がる熱線により大気中の乱流を測定する実験は価値があろうと考えた。²¹

ジョーンズはそれ以前にも風洞内の乱流発生 of せいで、大気中を飛行する飛行機表面上の境界層の層流から乱流への遷移は風洞での測定結果と異なっていることを知っていた。テイラーの理論はそれに理論的裏付けを与えてくれるものだった。ジョーンズはその後飛行機を用いた主翼面上の境界層の状態を調べる測定実験を進めていき、実際に大気中の飛行では乱流遷移のポイントが風洞実験からの予測よりも後退していることを明らかにしていく（下図参照）。²²

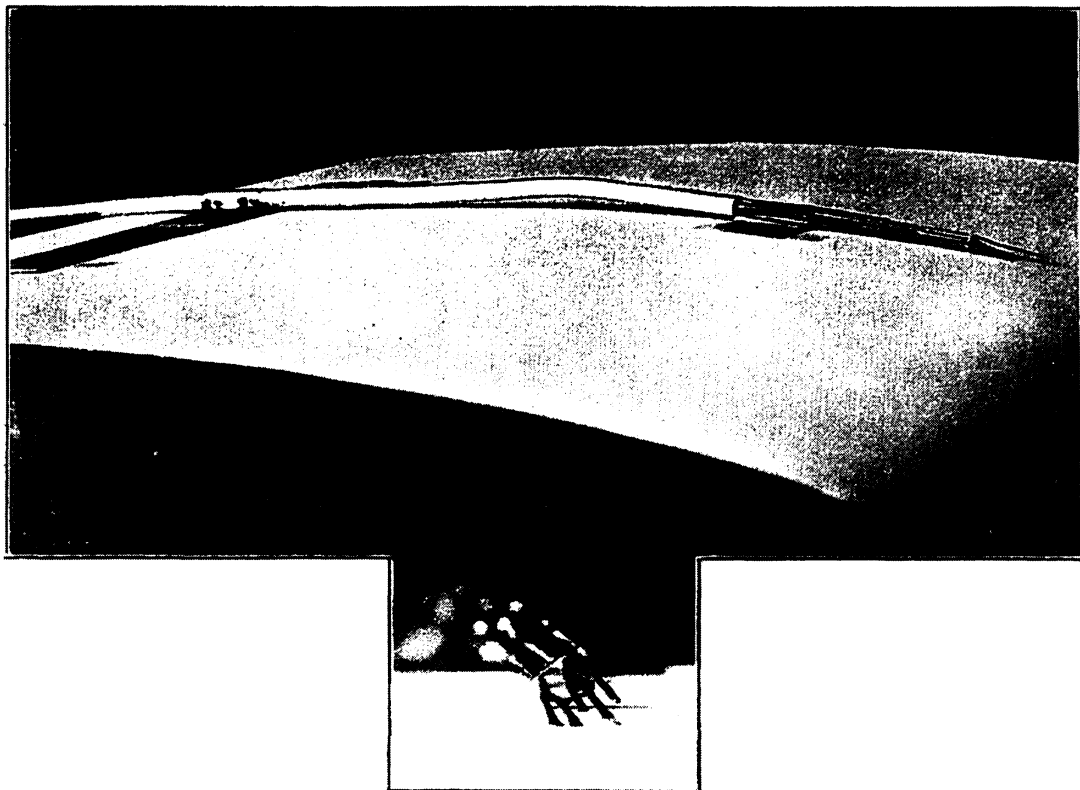


図 B.M.ジョーンズの飛行実験で装着された境界層測定器

主翼表面近くにピトー管を5つ装備して、表面付近の速度分布を測定した。

出典：B.M. Jones, "The Measurement of Profile Drag by the Pitot-traverse Method" (January 1936), R. & M. 1688.

²¹ Minutes of Fuid Motion Panel, 18 December 1934 (23rd meeting), DISR 22/49, NA.

²² B.M. Jones, "The Measurement of Profile Drag by the Pitot-traverse Method," 2202 (R. & M. 1688) (January 1936), DSIR 23/5453, National Archives, Kew, England.

5. アメリカと日本における層流翼の開発

ジョーンズが注目した大気中での渦のサイズは 25 センチというその数字は、不思議なことに出版されたテイラーの王立協会紀要論文には出てこない。²³航空研究委員会の技術報告には書かれているのに、公共に公開されている科学論文では書かれていないのである。これはテイラーが同委員会の委員と相談の上、故意に削除したものと推測される。委員会席上でジョーンズに「重要な実用的ポイント」と指摘され、委員の間でそのように共通了解されたことを、敢えて科学論文の紙面から削除したのではないかと思われるのである。

翌 1935 年の暮れにアメリカのイーストマン・ジェーコブスがヨーロッパに来る機会があり、その折りにケンブリッジに滞在し、ジョーンズやテイラーと懇談した。その折りに教示されたことがヒントとなり、その後の層流翼の開発の端緒となったことが知られている。²⁴テイラーの乱流理論が意味すること、ジョーンズが飛行実験により目指していること、それらを聞き主翼面上の境界層を層流に保つことの技術的可能性を彼もまた目指すようになっただろうと思われる。ジェーコブスはそれ以前高压風洞によりさまざまな翼型の性能を系統的に計測する実験研究に従事していた。そのため翼型の設計や性質については熟知していた。

先に引用した谷の回想には次のような言葉が続く。表面摩擦へと技術者の関心が集まり始めると、「表面積の過半を占める主翼の摩擦抵抗の減少に、速度向上を目指す設計者の期待が掛けられたのは当然です。」²⁵だが「実物の飛行機で遭遇するような高いレイノルズ数では、層流から乱流への遷移はかなり前方で起こることになり、結局層流翼断面のようなものは、実際には得られそうもな[かった]。」「²⁶そのように谷は初め考えていたが、航空学科の同級生であり当時川西航空機製造会社の設計技師を務めていた菊原静男から強く要望され層流翼の開発に乗り出すことになった。そのために乱流への遷移の機構を検討し、理論的な剥離点で乱流境界層への遷移点となることがありうると考えた。

²³ G.I. Taylor, "Statistical Theory of Turbulence, Part I," *Proceedings of the Royal Society, A*, 151 (1935): 421-444, reproduced in G.K. Batchelor, ed., *The Scientific Papers of G.I. Taylor*, vol. 2 (Cambridge: Cambridge University Press, 1960), pp. 288-306.

²⁴ James Hansen, *Engineer in Charge* (Washington, D.C.: NASA, 1987), pp. 111-118.

²⁵ 前掲谷「研究の回顧」168 ページ。

²⁶ 同上。

具体的な層流翼の設計作業には膨大な計算作業を要するため、なかなか本腰を入れて取り組めなかった。だが1939年にNACAで層流翼が開発されたという報を聞くに及び、そのための多大な労力を要する計算作業に助手とともに着手することになった。公刊雑誌から情報には具体的な技術情報はまったく与えられておらず、翼型の設計は独力で進めなければならなかった。²⁷そのために、航空学科の同僚守屋富次郎による翼型から翼面圧力分布を計算する新しい方法が役だった。

理論的にも実験的にも実現した層流翼だったが、実際に飛行機の翼型として利用する際には、大きな技術上の困難に遭遇した。それは翼面を極めて平滑にしなければならなかったが、当時の日本の工作技術においてそのような平滑な翼面を製作することが困難だった。一方、谷が知人を介して入手した当時の機密報告には、アメリカ機に採用された層流翼においては要求される平滑性が実現されていることが記されていた。(実際には戦時中は米国側でも全機で十分な平滑性を達成することは困難だったようである。²⁸)

6. 結語

以上、1920、30年代における航空工学との関連での空気力学の発展、とりわけ乱流や境界層の科学的研究と流線形機や層流翼の設計といった技術開発とを簡単に追った。1940年に日本の航空工学者谷一郎は、アメリカの技術者とほぼ独立に層流翼を開発することに成功した。その背景には、ジョーンズの飛行実験とともに、プラントル、カルマン、テイラーを指導的存在とする乱流の実験的理論的研究の急速な進展が存在した。テイラーとともにプラントルは第一次世界大戦以前から境界層や乱流の問題に関心を寄せており、1920年代後半以降の大きな発展は、戦前からの研究を基礎として発展していったものである。カルマン渦の発見は、そのようなプラントル学派の渦・乱流・境界層に関する基礎的研究のごく初期に生み出された特筆すべき成果だったといえよう。

²⁷ 野田親則「谷一郎先生の追憶」、谷一郎先生追悼文集編集委員会編『一期一会—谷一郎先生追悼文集』谷一郎先生を偲ぶ会世話人会、1991年、146ページ。

²⁸ 航空技術の歴史に詳しい技術史家であり航空工学者であるウォルター・ヴィンセンティは、アメリカの層流翼も戦時中は製造が困難だったことを記している。Walter Vincenti, *What Engineers Know and How They Know It: Analytical Studies from Aeronautical History* (Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1990), p. 45.

ちなみに谷は層流翼の開発した後、1941年から長期研修のためにアメリカを訪問する予定を立てていた。そしてカリフォルニア工科大学にも滞在しカルマンに教えを請うことも計画していたという。開戦直前でその計画は実現しなかったが、戦後アメリカを訪問した際にカルマンにも面会し、親交を深めるとともに、彼の著作『飛行の理論』の編集も手伝った。谷の研究回顧の冒頭には、彼の研究室に飾られるカルマンの肖像写真が谷の背後に掲げられており、谷がカルマンに最高の敬意を払っていたことが伺える。